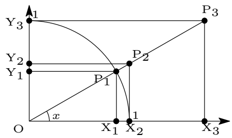
公式集

1.　初等関数

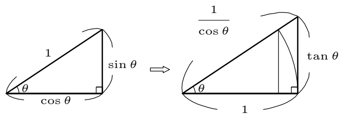
◆　**三角関数**　角 x に対し次の 6 つの三角関数がある：

$$\sin x\ (=\mathrm{OY}_1),\quad \cos x\ (=\mathrm{OX}_1),\quad \tan x\ (=\mathrm{OY}_2),$$
$$\cot x\ (=\mathrm{OX}_3),\quad \sec x\ (=\mathrm{OP}_2),\quad \mathrm{cosec}\, x\ (=\mathrm{OP}_3)$$

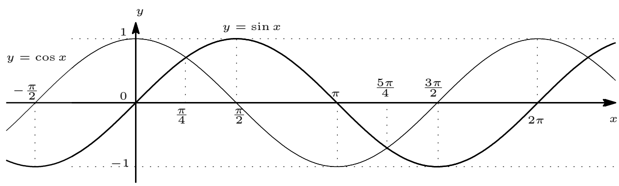


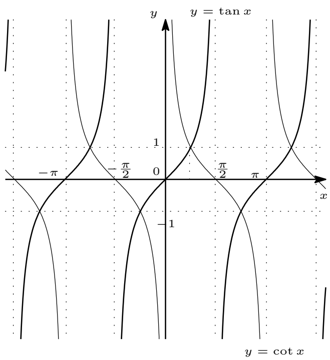
これらについて次の相互関係が成り立つ：

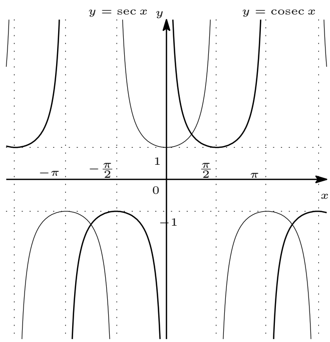
$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad \sec x=\frac{1}{\cos x},$$
$$\cot x=\frac{1}{\tan x},\quad \mathrm{cosec}\, x=\frac{1}{\sin x}$$



◆　**三角関数のグラフ**

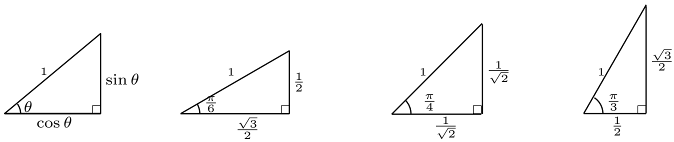






◆ 三角関数の特殊値

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$



$$\lim_{\theta\to-\frac{\pi}{2}+0}\tan\theta=-\infty \qquad \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\tan\theta=+\infty \qquad \lim_{\theta\to 0+0}\cot\theta=+\infty \qquad \lim_{\theta\to\pi-0}\cot\theta=-\infty$$

$$\lim_{\theta\to-\frac{\pi}{2}-0}\sec\theta=-\infty \qquad \lim_{\theta\to-\frac{\pi}{2}+0}\sec\theta=+\infty \qquad \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\sec\theta=+\infty \qquad \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}+0}\sec\theta=-\infty$$

$$\lim_{\theta\to 0-0}\operatorname{cosec}\theta=-\infty \qquad \lim_{\theta\to 0+0}\operatorname{cosec}\theta=+\infty \qquad \lim_{\theta\to\pi-0}\operatorname{cosec}\theta=+\infty \qquad \lim_{\theta\to\pi+0}\operatorname{cosec}\theta=-\infty$$

◆ 三角関数の基本公式

(オイラーの公式) $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,\quad \cos\theta=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\quad \sin\theta=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

ここで $i=\sqrt{-1}$ は虚数単位を表す.

(基本関係) $\sin^2 x+\cos^2 x=1,\quad 1+\tan^2 x=\sec^2 x,\quad 1+\cot^2 x=\operatorname{cosec}^2 x$

(偶奇性) $\sin(-x)=-\sin x,\quad \cos(-x)=\cos x,\quad \tan(-x)=-\tan x$

(周期) $\sin(x+2n\pi)=\sin x,\quad \cos(x+2n\pi)=\cos x,\quad \tan(x+n\pi)=\tan x$ (n は整数)

(余角) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x,\quad \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x,\quad \tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cot x$

(補角) $\sin(\pi-x)=\sin x,\quad \cos(\pi-x)=-\cos x,\quad \tan(\pi-x)=-\tan x$

(加法定理)
$$\begin{cases} \sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y, \\ \cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y, \\ \tan(x\pm y)=\dfrac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y} \end{cases}$$
(複合同順)

(倍角の公式)
$$\begin{cases} \sin 2x = 2\sin x \cos x, \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \;=\; 2\cos^2 x - 1 \;=\; 1 - 2\sin^2 x, \\ \tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \end{cases}$$

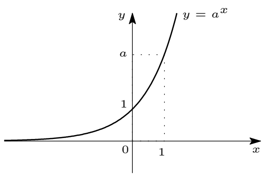
(半角の公式) $\sin^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{2}, \quad \cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2}, \quad \tan^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

(合成)
$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$$
(ただし $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \ \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$)

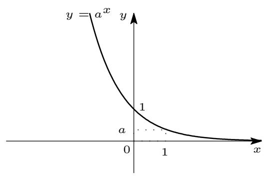
(積・和の公式)
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\{\sin(x+y) + \sin(x-y)\}$$
$$\cos x \sin y = \frac{1}{2}\{\sin(x+y) - \sin(x-y)\}$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\{\cos(x+y) + \cos(x-y)\}$$
$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}\{\cos(x+y) - \cos(x-y)\}$$

(和・積の公式)
$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

◆ **指数・対数関数** $a > 0$, $a \neq 1$ に対し $y = a^x$ を a を底とする指数関数という．定義域は $(-\infty, \infty)$, 値域は $(0, \infty)$． $a > 1$ のときは狭義単調増加，$0 < a < 1$ のときは狭義単調減少となる．

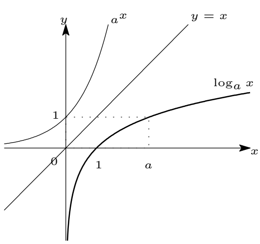


$1 < a$ のとき

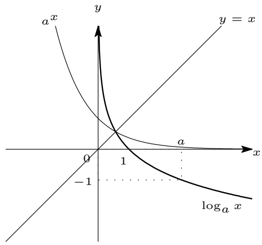


$0 < a < 1$ のとき

$a > 0$, $a \neq 1$ とする．指数関数 $y = a^x$ の逆関数を a を底とする対数関数といい，$y = \log_a x$ と記す．特に $a = e$ (自然対数の底) の場合，$\log_e x$ を $\ln x$ と記す．定義域は $(0, \infty)$，値域は $(-\infty, \infty)$． $a > 1$ のときは狭義単調増加，$0 < a < 1$ のときは狭義単調減少となる．



$a>1$ のとき



$0<a<1$ のとき

◆ 指数・対数関数の基本公式

(逆対応)　$y=a^x \;\Leftrightarrow\; x=\log_a y$　特に $y=a^{\log_a y}$, $x=\log_a a^x$.

(特殊値)　$a^0=1$, $a^1=a$,　$\log_a 1=0$,　$\log_a a=1$.

(特殊値)　$a>1$ のとき

$$\lim_{x\to-\infty} a^x=0,\quad \lim_{x\to\infty} a^x=+\infty,\quad \lim_{x\to 0+0}\log_a x=-\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\log_a^x=+\infty,$$

$0<a<1$ のとき

$$\lim_{x\to-\infty} a^x=+\infty,\quad \lim_{x\to\infty} a^x=0,\quad \lim_{x\to 0+0}\log_a x=+\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\log_a^x=-\infty,$$

(指数法則)　$a^x a^y=a^{x+y}$,　$\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$.　特に　$a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$

(指数法則)　$(a^x)^y=a^{xy}$,

(指数法則)　$(ab)^x=a^x b^x$,　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$　　$(b>0,\, b\neq 1)$

(対数法則)　$\log_a xy=\log_a x+\log_a y$,　$\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$,

特に　$\log_a \dfrac{1}{x}=-\log_a x$,

(対数法則)　$\log_a x^\alpha=\alpha\log_a x$

(底の変換公式)　$\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$　特に $\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$

(べきの表示)　$x>0$ のとき　$x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$　(α は実数)

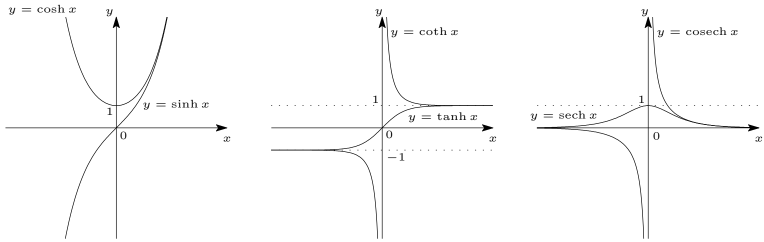
(急減少性)　任意の正整数 n に対し　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$,　$\displaystyle\lim_{x\to 0+0} x^n\ln x=0$

◆ 双曲線関数

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\qquad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\qquad \tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x},$$

$$\coth x=\frac{1}{\tanh x}=\frac{\cosh x}{\sinh x},\qquad \mathrm{sech}\, x=\frac{1}{\cosh x},\qquad \mathrm{cosech}\, x=\frac{1}{\sinh x}$$

をそれぞれ 双曲線正弦関数, 双曲線余弦関数, 双曲線正接関数, 双曲線余接関数, 双曲線正割関数, 双曲線余割関数 といい, 総称して双曲線関数という.



◆ 双曲線関数の基本公式

(指数関数) $e^x = \cosh x + \sinh x, \quad e^{-x} = \cosh x - \sinh x$

(特殊値) $\sinh 0 = 0, \quad \cosh 0 = 1, \quad \tanh 0 = 0, \quad \operatorname{sech} 0 = 1$

(特殊値) $\lim_{x \to \pm\infty} \cosh x = \infty \quad \lim_{x \to \pm\infty} \sinh x = \pm\infty \quad \lim_{x \to \pm\infty} \tanh x = \pm 1$

$\lim_{x \to 0 \pm 0} \coth x = \pm\infty \quad \lim_{x \to \pm\infty} \coth x = \pm 1$

$\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{sech} x = 0 \quad \lim_{x \to 0 \pm 0} \operatorname{cosech} x = \pm\infty \quad \lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{cosech} x = 0$

(基本関係) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x, \quad \coth^2 x - 1 = \operatorname{cosech}^2 x$

(偶奇性) $\sinh(-x) = -\sinh x, \quad \cosh(-x) = \cosh x, \quad \tanh(-x) = -\tanh x$

(加法定理)
$$\begin{cases} \sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y, \\ \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y, \\ \tanh(x \pm y) = \dfrac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y} \end{cases} \quad \text{(複合同順)}$$

(2 倍公式)
$$\begin{cases} \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x, \qquad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x, \\ \tanh 2x = \dfrac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x} \end{cases} \quad \text{(複合同順)}$$

(逆関数) $x = \cosh y \ \ (y \geq 0)$ のとき $y = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

$x = \sinh y$ のとき $y = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

$x = \tanh y$ のとき $y = \dfrac{1}{2} \log \dfrac{1 + x}{1 - x}$

2. 極限・連続関数

◆ **極限** 関数 $y=f(x)$ について，独立変数 x が a に限りなく近づくとき，従属変数 y が b に限りなく近づくとき，$f(x)$ は b に**収束する**，b を $x\to a$ のときの $f(x)$ の**極限**といい，$\lim_{x\to a} f(x)=b$ または $f(x)\to b \ (x\to a)$ と記す．b が極限である事と次の "ε-δ 論法" が成立する事は同値：

"任意の正数 $\varepsilon>0$ に対し「$|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-b|<\varepsilon$」となる正数 $\delta>0$ が常に存在する."

◆ **基本公式**

(1) $\lim_{x\to a} kf(x)=k\lim_{x\to a} f(x)$ (k は定数)

(2) $\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$

(3) $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$

(4) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ $\left(\lim_{x\to a} g(x)\neq 0 \text{ のとき}\right)$

◆ **はさみうちの原理** $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ かつ $\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} h(x)=\alpha$ ならば $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$

◆ **重要な極限値**

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

(2) $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

(3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}=1$

(4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

((2) の極限値 e を "指数対数の底" または "ネピアの数" という.)

◆ **連続関数** 関数 $f(x)$ は $x=a$ を含む区間 I で定義され，かつ $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ が成り立つとき，$x=a$ で**連続** (continuous) であるという．区間 I のすべての点で連続なとき，$f(x)$ は I 上で**連続**であるという.

◆ **基本事項**

(1) $f(x), g(x)$ が $x=a$ で連続ならば

$$kf(x)\ \ (k \text{ は定数}),\qquad f(x)\pm g(x),\qquad f(x)g(x),\qquad \frac{f(x)}{g(x)}\ \ (\text{ただし } g(a)\neq 0)$$

も連続.

(2) $f(x)$ が $x=a$ で連続，かつ $g(t)$ が $f(a)$ で連続ならば合成関数 $g(f(x))$ は $x=a$ で連続.

(3) $f(x)$ が連続な狭義単調関数ならば逆関数 $f^{-1}(x)$ も連続.

(4) **(中間値の定理)** $f(x)$ が閉区間 $a\leq x\leq b$ で連続，かつ $f(a)\neq f(b)$ ならば $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の数 α に対し $f(c)=\alpha$ $(a<c<b)$ となる c が少なくとも 1 つ存在する.

(5) **(最大, 最小の原理)** $f(x)$ が有界な閉区間 I で連続ならば $f(x)$ は I の或る点で最大値，最小値をとる.

3.　微分係数・導関数

1.　微分係数　関数 $f(x)$ が $x=a$ とその近傍で定義され，有限な極限値：

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

が存在するとき，$f(x)$ は $x=a$ で**微分可能**であるといい，$f'(a)$ を $x=a$ での**微分係数**という．

関数 $f(x)$ が $x=a$ とその近くの右側 (左側) で定義され，有限な片側極限値：

$$f'_{+}(a)=\lim_{h\to 0+0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$\left(f'_{-}(a)=\lim_{h\to 0-0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$$

が存在するとき，$f(x)$ は $x=a$ で**右微分可能** (**左側分可能**) であるといい，$f'_{+}(a)$　$(f'_{-}(a))$ を $x=a$ に於ける $f(x)$ の**右微分係数**　(**左微分係数**) という．

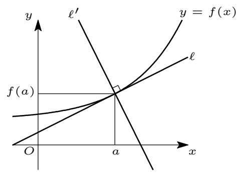
$f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば $f(x)$ は $x=a$ で連続である (一般にその逆は成立しない)．

◆　**接線・法線**　関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能のとき，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,f(a))$ における**接線** (右図の直線 ℓ) の方程式は

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

また, **法線** (右図の直線 ℓ') の方程式は

$$\begin{aligned} &y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a) && (f'(a)\neq 0 \text{ のとき}) \\ &x=a && (f'(a)=0 \text{ のとき}) \end{aligned}$$



2.　導関数　関数 $f(x)$ が区間 I の各点で微分可能なとき，$f(x)$ は区間 I で微分可能だという．I の各点 x に対し微分係数 $f'(x)$ を与える関数 f' を $y=f(x)$ の**導関数**といい，これを y'，$\dfrac{dy}{dx}$，f'，$f'(x)$，$\dfrac{df}{dx}(x)$ などと記す．

◆　**基本公式**　$f(x),g(x)$ が微分可能のとき次が成立：

(定数倍)	$(cf)'=cf'$	(和・差)	$(f+g)'=f'+g'$
(積)	$(fg)'=f'g+fg'$	(商)	$\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$

◆　**合成関数の微分**　$y=f(t)$，$t=g(x)$ の合成関数 $y=f(g(x))$ に対して

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}\qquad (\text{または } (f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x))$$

◆　**逆関数の微分**　$y=f(x)$ が単調増加，微分可能，かつ $f'(x)\neq 0$ のとき，逆関数 $x=f^{-1}(y)$ に対

して

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dt}} \qquad (\text{または } (f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)})$$

◆ **媒介変数で表される関数の微分**　$x = f(t)$，$y = g(t)$ が微分可能，$f(t)$ は単調，かつ $f'(t) \neq 0$ のとき，y は x の微分可能な関数となり，x に関する微分は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dt}{dx}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

◆ **基本的な関数の導関数**

(1) $(c)' = 0$ 　(c は定数)

(2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ 　(α は定数)

(3) $(e^x)' = e^x$

(4) $(a^x)' = a^x \ln a$ 　$(a > 0, a \neq 1)$

(5) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

(6) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ 　$(a > 0, a \neq 1)$

(7) $(\sin x)' = \cos x$

(8) $(\cos x)' = -\sin x$

(9) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

(10) $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$

(11) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(12) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(13) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

◆ **基本的な公式**

(1) $(f(ax+b))' = af'(ax+b)$
　(a, b は定数，$a \neq 0$)

(2) $(\{f(x)\}^\alpha)' = \alpha f'(x)\{f(x)\}^{\alpha-1}$ 　(α は定数)

(3) $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$ 　(逆数微分)

(4) $(e^f)' = f'e^f$

(4) $(a^f)' = f'a^f \ln a$ 　$(a > 0, a \neq 1)$

(4) $(\ln |f|)' = \dfrac{f'}{f}$ 　(対数微分)

◆ **高次導関数**　関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ がまた微分可能なとき，$f(x)$ は 2 回微分可能だという．このとき $f'(x)$ の導関数を $y = f(x)$ の **2 次導関数**といって

$$y'', \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad f'', \quad f''(x), \quad \frac{d^2f}{dx^2}(x)$$

などと記す．同様にして自然数 n に対し $y = f(x)$ が n 回微分可能なとき n **次導関数**が定義され，これを

$$y^{(n)}, \quad \frac{d^ny}{dx^n}, \quad f^{(n)}, \quad f^{(n)}(x), \quad \frac{d^nf}{dx^n}(x)$$

などと記す．2 次以上の導関数を**高次導関数**という．

◆ **ライプニッツの定理**　f, g が n 回微分可能ならば

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(n-k)} g^{(k)}$$
$$= f^{(n)} g + {}_nC_1 f^{(n-1)} g^{(1)} + {}_nC_2 f^{(n-2)} g^{(2)} + \cdots + + {}_nC_{n-1} f^{(1)} g^{(n-1)} + f g^{(n)}$$

◆ **基本的な関数の高次導関数**

(1)　$(e^x)^{(n)} = e^x$

(2)　$\{\log(1+x)\}^{(n)} = (-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

(3)　$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

(4)　$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

(5)　$\{(1+x)^\alpha\}^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$

◆ **平均値の定理**　関数 $f(x), g(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能だとする．

(1) **(ロールの定理)** $f(a) = f(b) = 0$ ならば　$f'(c) = 0$　$(a < c < b)$ となる c が少なくとも 1 つ存在する．

(2) **(平均値の定理)**

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \qquad (a < c < b)$$

となる c が少なくとも 1 つ存在する．

(3)　(a,b) で $f'(x) = 0$ ならば $f(x) = c$　(c は定数)．

(4) **(コーシーの平均値の定理)** $g'(x) \neq$ ならば

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (a < c < b)$$

となる c が少なくとも 1 つ存在する．

◆ **関数の増減，凹凸**　$f(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能だとする．このとき

(i)　つねに $f'(x) \geq 0$ ならば $f(x)$ は単調増加．

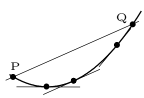
(ii)　つねに $f'(x) \leq 0$ ならば $f(x)$ は単調減少．

関数 $f(x)$ について，そのグラフの任意の 2 点 P,Q をとるとき，弧 $\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}$ が線分 $\overline{\mathrm{PQ}}$ よりも下にある (上にある) とき，$f(x)$ は下に凸 (上に凸) だという．

$f(x)$ は下に凸　$\Leftrightarrow$　曲線は任意の点での接線よりも上にある．

$f(x)$ は上に凸　$\Leftrightarrow$　曲線は任意の点での接線よりも下にある．

と定義してもよい．特に 2 回微分可能なとき，



(i)　つねに $f''(x) \geq 0$ ならば $f(x)$ は下に凸．

(ii)　つねに $f''(x) \leq 0$ ならば $f(x)$ は上に凸．

◆ **関数の極値**　$f(x)$ は $x = a$ の近傍で n 回微分可能であり，

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0 \quad (n \geq 2)$$

だとする．このとき

$$n \text{ が偶数，かつ } \begin{cases} f^{(n)}(a) > 0 & \Rightarrow \quad f(a) \text{ は極小値} \\ f^{(n)}(a) < 0 & \Rightarrow \quad f(a) \text{ は極大値} \end{cases}, \qquad n \text{ が奇数ならば } f(a) \text{ は極値ではない．}$$

◆ **不定形の極限値・ロピタルの定理** $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, \infty-\infty$ などの形になる極限を“不定形”という．微分可能な関数 f, g について

1. $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ または $\dfrac{\infty}{\infty}$ （不定形） 2. 極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在（$\pm\infty$ の場合も含む）

が成り立つならば $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

◆ **テイラーの定理** 関数 $f(x)$ が a, b を含む区間で $n+1$ 回微分可能ならば次の式を満たす $a < c < b$ がとれる：

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ \cdots \ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}$$

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \qquad (n+1 \text{ 次剰余項})$$

◆ **基本的な関数のマクローリン展開**

(i) $$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

(ii) $$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

(iii) $$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

(iv) $$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

(v) $$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

(vi) $$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

(vii) $$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^n + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

ここで $\displaystyle\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$.

(viii) $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}x^k \qquad (|x| < 1)$$

4.　積分

◆　基本的な関数の不定積分　($a>0$ は定数，$A\neq 0$，積分定数は省略する)

(1) $\displaystyle\int c\,dx = cx$　($c\neq 0$ は定数)

(2) $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$　($\alpha\neq -1$)

(3) $\displaystyle\int x^{-1}dx = \int\frac{dx}{x} = \ln|x|$

(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$

(5) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$

(6) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a}$

(7) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|$

(8) $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right\}$

(9) $\displaystyle\int\sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+A}+A\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right\}$

(10) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x$

(11) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$　($a>0$ は定数)

(12) $\displaystyle\int\sin x\,dx = -\cos x$

(13) $\displaystyle\int\cos x\,dx = \sin x$

(15) $\displaystyle\int\tan x\,dx = -\ln|\cos x|$

(16) $\displaystyle\int\cot x\,dx = \ln|\sin x|$

(17) $\displaystyle\int\sec^2 x\,dx = \int\frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$

(18) $\displaystyle\int\mathrm{cosec}^2\,x\,dx = \int\frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$

(18) $\displaystyle\int\sinh x\,dx\,dx = \cosh x$

(19) $\displaystyle\int\cosh x\,dx\,dx = \sinh x$

(20) $\displaystyle\int\tanh x\,dx\,dx = \ln\cosh x$

◆　線形性

(1) $\displaystyle\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$　(k は定数)

(2) $\displaystyle\int(f(x)\pm g(x))dx = \int f(x)dx\pm\int g(x)dx$　(複合同順)

◆　置換積分法

(1)　$x=\varphi(t)$ と置けば $\displaystyle\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$

(2)　$f(x)$ の不定積分 $F(x)=\displaystyle\int f(t)dt$　に対し $t=\varphi(x)$ とすれば $\displaystyle\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x))$

◆　利用頻度の高い公式

(1) $\displaystyle\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b).$

(2) $\displaystyle\int\{\varphi(x)\}^\alpha\varphi'(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}\{\varphi(x)\}^{\alpha+1}$　($\alpha\neq -1$)

(3) $\displaystyle\int\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \ln|\varphi(x)|$

◆ **部分積分法**

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx, \qquad \text{特に} \quad \int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$$

部分積分法により次が導かれる：

(1) $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) \qquad (a^2+b^2\neq 0)$

(1)' $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) \qquad (a^2+b^2\neq 0)$

(2) $\displaystyle\int \log x dx = x\log x - x$

◆ **漸化式**

(1) $I_n = \displaystyle\int \sin^n x\,dx$ ならば $I_n = \displaystyle -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}I_{n-1} \qquad (n\neq 0)$

(2) $I_n = \displaystyle\int \cos^n x\,dx$ ならば $I_n = \displaystyle \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}I_{n-1} \qquad (n\neq 0)$

(3) $I_n = \displaystyle\int \tan^n x\,dx$ ならば $I_n = \displaystyle \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x - I_{n-2} \qquad (n\neq 1)$

(4) $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ ならば $I_n = \displaystyle \frac{1}{2(n-1)a^2}\left\{\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right\}$
$(a\neq 0,\ n\neq 1)$

(5) $I_n = \displaystyle\int x^n e^{ax}\,dx$ ならば $I_n = \displaystyle \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}I_{n-1} \qquad (a\neq 0)$

(6) $I_n = \displaystyle\int x^\alpha(\log x)^n\,dx$ ならば $I_n = \displaystyle \frac{x^{\alpha+1}(\log x)^n}{\alpha+1} - \frac{n}{\alpha+1}I_{n-1} \qquad (\alpha\neq -1)$

◆ **有理関数の不定積分**　有理関数 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ $(p(x), q(x)$ は多項式，$q(x)\neq 0)$ の積分 $I = \displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ の計算は以下の 3 工程からなる：

(I) $\dfrac{p(x)}{q(x)} = f(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)}$ $(f(x)$ は多項式，$\deg r(x) < \deg q(x))$ という形に直す．

(II) 実数係数の範囲で $q(x)$ を因数分解する． $q(x)$ は (a) $(x-a)^n$, (b) $(x^2-ax+b)^n$ $(a^2-4b<0)$ という形の式の積として表される．

(III) (II) の分解に応じて被積分関数を部分分数展開する．分数の因子の形に応じて部分分数を次のような形だと仮定する：

分母の因数が (a) の場合，$\qquad \displaystyle\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$

分母の因数が (b) の場合，$\qquad \displaystyle\frac{A_1x+B_1}{x^2-ax+b} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2-ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(x^2-ax+b)^n}$

(III) (II) の分解に応じ，以下の 3 種の公式を用いて積分の計算を実行する：

(1) $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n} \qquad (n=1,2,\ldots)$

- $n=1$ ならば $I_1 = \ln|x-a|$
- $\neq 1$ ならば $I_n = \displaystyle -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$

(2) $J_n = \displaystyle\int \frac{dx}{\{(x-p)^2+q^2\}^n} \quad (n=1,2,\dots)$

- $n=1$ ならば $J_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-p)^2+q^2} = \frac{1}{q}\tan^{-1}\frac{x-p}{q} + C.$
- $n>1$ ならば漸化式 $J_n = \displaystyle\frac{1}{2(n-1)q^2}\left[\frac{x-p}{\{(x-p)^2+q^2\}^{n-1}} + (2n-3)J_{n-1}\right]$ で $n-1$ の場合に帰着させる．

(3) $K_n = \displaystyle\int \frac{x}{\{(x-p)^2+q^2\}^n}dx \quad (n=1,2,\dots)$

- $n=1$ ならば $K_1 = \displaystyle\int \frac{x}{(x-p)^2+q^2}dx = \frac{1}{2}\ln\{(x-p)^2+q^2\} + \frac{1}{q}\tan^{-1}\frac{x-p}{q} + C.$
- $n>1$ ならば漸化式 $K_n = \displaystyle -\frac{1}{2(n-1)\{(x-p)^2+q^2\}^{n-1}} + pJ_n$ で (2) の場合に帰着させる．

◆ 置換表

$f(X)$ を 1 変数有理関数，$f(X,Y)$ を 2 変数有理関数とする．以下の表にある各型に対する置換を施す事により積分は有理関数の積分に帰着される：

■ 基本的な関数の場合

被積分関数	置換法	被積分関数	置換法
$f(\sin x)\cos x$	$t=\sin x$	$f(\cos x)\sin x$	$t=\cos x$
$f(e^x)e^x$	$t=e^x$	$f(\log x)\dfrac{1}{x}$	$t=\log x$

■ 三角関数

被積分関数	置換法	備考
$f(\cos x,\sin x)$	$t=\tan\dfrac{x}{2}$	$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2},\quad dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$
$f(\cos^2 x,\sin^2 x)$	$t=\tan x$	$\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2},\quad \sin x = \dfrac{t^2}{1+t^2},\quad dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$

■ 無理関数 $(a\neq 0)$

被積分関数	置換法	備考

$f\left(x,\ \sqrt[n]{ax+b}\,\right)$	$t=\ \sqrt[n]{ax+b}$	$ax+b=t^n,\quad dx=nt^{n-1}dt$
$f\left(x,\ \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$ $(ad-bc\neq 0)$	$t=\ \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cs+d}}$	$x=\dfrac{dt^n-b}{-ct^n+a}$, $dx=\dfrac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(-ct^n+a)^2}dt$
$f\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\,\right)$ $(a>0)$	$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x$	$x=\dfrac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}$, $dx=\dfrac{2\sqrt{a}t^2+2bt+2\sqrt{a}c}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt$
$f\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\,\right)$ $(a<0,\ b^2-4ac>0)$	$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ かつ $\alpha<\beta$ のとき $t=\sqrt{\dfrac{x-\alpha}{\beta-x}}$	$x=\dfrac{\beta t^2+\alpha}{t^2+1},\ dx=\dfrac{2t(\beta-\alpha)}{(t^2+1)^2}dt$

■　**2 次式の平方根を含む場合**　$(a>0)$

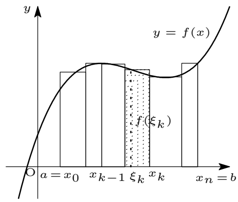
被積分関数	置換法	備考
$f(x,\sqrt{a^2-x^2}\,)$	$x=a\sin\theta\quad\left(-\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$	$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos\theta,\ dx=a\cos\theta d\theta$
$f(x,\sqrt{x^2+a^2}\,)$	$x=a\tan\theta\quad\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$	$\sqrt{x^2+a^2}=a\sec\theta,\ dx=a\sec^2\theta d\theta$
$f(x,\sqrt{x^2-a^2}\,)$	$x=a\sec\theta\quad\left(0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2},\theta\neq\dfrac{\pi}{2}\right)$	$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan\theta,\ dx=a\tan\theta\sec\theta d\theta$

◆　**不定積分が求められない例**　次は不定積分を初等関数で表す事が出来ない例である：

$\displaystyle\int e^{-x^2}dx$　(Gauss 積分)　　$\displaystyle\int\sin\left(x^2\right)dx$　(Frenel 積分)　　$\displaystyle\int\frac{\sin x}{x}dx$　(積分正弦関数)

◆　**定積分**　$f(x)$ が有界閉区間 $[a,b]$ で連続であるとする． $[a,b]$ 内に

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$



となる分割点 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ をとり，小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の長さを Δx_k とする．さらに各 k について区間 $[x_{k-1}, x_k]$ から代表点 ξ_k を任意に選んで次の和と分割の長さ $|\Delta|$ を作る：

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k, \qquad |\Delta| = \max\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n\}$$

分割を細分し $|\Delta| \to 0$ のとき，分割点，及び代表点の選び方に依らず，上の和が一定の値 $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ に近づくとする．この極限を $f(x)$ の区間 $[a, b]$ 上の**定積分**という．

◆ **区分求積法** 有界閉区間 $[a, b]$ 上の関数 $f(x)$ が積分可能ならば次の等式が成り立つ：

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$$

◆ **微分積分学の基本定理**

(1) $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt \ \Rightarrow\ F'(x) = f(x)$，すなわち $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x)$

(2) $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$

◆ **基本的な性質**

(1) (線形性) $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$ 　(α, β は定数)

(2) (加法性) $a \leq c \leq b$ のとき，$\displaystyle\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

(3) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \quad \int_a^a f(x)dx = 0$

(4) (単調性) $a \leq x \leq b$ に対し $f(x) \leq g(x)$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

(5) (三角不等式) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

◆ **置換積分法** $x = \varphi(t)$ と置く．$\alpha \leq t \leq \beta$ のとき $\varphi(t)$ は連続的に $a = \varphi(\alpha)$ から $b = \varphi(\beta)$ に変化し，$\varphi'(t)$，及び $f(\varphi(t))$ が連続関数のとき，

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

◆ **部分積分法**

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \qquad \text{特に} \int_a^b f(x)dx = \Big[xf(x)\Big]_a^b - \int_a^b xf'(x)g(x)dx$$

◆ **よく利用される公式**

(1) $f(x)$ が偶関数ならば $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$ $f(x)$ が奇関数ならば $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

(2) (Wallis の公式) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n \text{ は偶数}) \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1 & (n \text{ は奇数}) \end{cases}$

(3) (三角関数の直交性) m, n を整数とする.

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n\ (\neq 0)) \end{cases},$$

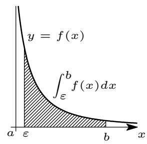
$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n\ (\neq 0)) \end{cases},$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx = 0$$

◆ **広義積分** $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ とする.

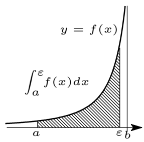
(i) $f(x)$ が $(a, b]$ で連続, $x = a$ で不連続なとき,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to a+0} \int_\varepsilon^b f(x)dx$$



(ii) $f(x)$ が $[a, b)$ で連続, $x = b$ で不連続なとき,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to b-0} \int_a^\varepsilon f(x)dx$$



(ii) $f(x)$ が (a, b) で連続, $x = a, x = b$ で不連続なとき,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to b-0 \\ \varepsilon_2 \to a+0}} \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} f(x)dx$$

それぞれの場合について右辺の極限が存在するとき, **広義積分** $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ **は収束する**といい, 右辺の極限によって左辺の広義積分の値を定義する.

◆ **広義積分が収束する為の条件** $f(x)$ は $[a, b)$ で連続だとする.

(i) $b < \infty$ の場合, 適当な $\delta > 0$ に対し $(b - \delta, b)$ において $|f(x)| \leq \dfrac{M}{(b-x)^\beta}$ となる正数 M と $0 < \beta < 1$ がとれるならば, 広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は収束する.

(ii) $b = \infty$ の場合, 十分大きな x に対し常に $|f(x)| \leq \dfrac{M}{x^\beta}$ となる正数 M と $1 < \beta$ がとれるならば, 広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は収束する.

◆ **よく利用される広義積分**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \quad \text{(Gauss 積分)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{(Frenel 積分)}$$

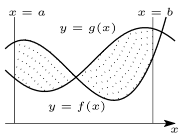
$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos(bx)dx = \frac{a}{a^2+b^2} \qquad \int_0^{\infty} e^{-ax}\sin(bx)dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

◆ **面積** $a \leq b$ とする.

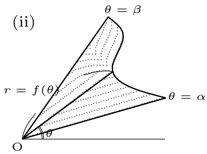
(i) $x=a,\ x=b$ および $f(x), g(x)$ のグラフにより囲まれた部分の面積は $A = \displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$ で与えられる.

(ii) 極方程式 $r = f(\theta)$ $(\alpha \leq r \leq \beta)$ により与えられる曲線と半直線 $\theta=\alpha,\ \theta=\beta$ により囲まれた部分の面積は $A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta \{f(\theta)\}^2 d\theta$ で与えられる.

(i)



(ii)



◆ **曲線の長さ** C を点 P,Q を結ぶ平面内の曲線の長さは $\ell = \displaystyle\int_C \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$.

(i) C が $y=f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ で与えられるとき,

$$\ell = \int_C \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,|dx|$$

(ii) C が極方程式 $r=f(\theta)$ $(\alpha \leq \theta \leq \beta)$ で与えられるとき,

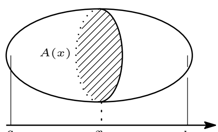
$$\ell = \int_C \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,|d\theta|$$

◆ **体積** $x=x$ での切断面の面積が $A(x)$ のときの立体の体積 V は

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

特に $f(x)$ のグラフ $y=f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ を x 軸の周りを 1 回転させて出来る回転体の体積 V は

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi\int_a^b f(x)^2 dx$$



5. 偏微分

◆ **2 変数関数の極限** $z=f(x,y)$ を 2 変数関数，(a,b) を xy 平面の点とする．平面上の点 (x,y) を (a,b) に限りなく近づけるとき (即ち，$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\to 0$ のとき)，その近づけ方に依らず $f(x,y)$ が一定の値 c に近づくとき，c を $(x,y)\to(a,b)$ のときの $f(x,y)$ の**極限**といい，これを $c=\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ と記す．また c が極限である事を $f(x,y)\to c\ \ ((x,y)\to(a,b))$ と記す．

◆ **2 変数関数の連続性** $z=f(x,y)$ を 2 変数関数，(a,b) を xy 平面の点とする．3 条件

(a) $f(a,b)$ が定義されている．

(b) 極限 $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ が存在する．

(c) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$

が成り立つとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) で**連続**であるという．また $f(x,y)$ がある集合 D の各点で連続であるとき，$f(x,y)$ は D 上連続だという．

◆ **偏微分係数，偏導関数** $z=f(x,y)$ を 2 変数関数，(a,b) を xy 平面の点とする．x の関数 $f(x,b)$ が $x=a$ で微分可能 (y の関数 $f(a,y)$ が $y=b$ で微分可能) なとき，$f(x,y)$ は (a,b) で x について (y について) **偏微分可能**だといい，その微分係数

$$f_x(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}\qquad \left(f_y(a,b)=\lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}\right)$$

を x に関する (y に関する) **偏微分係数**という．

各点 (x,y) で x に関し (y に関し) 偏微分可能なとき，各点 (x,y) に x に関する (y に関する) 偏微分係数を対応させる関数を x に関する (y に関する) **偏導関数**といい，これを

$$f_x(x,y),\quad f_x,\quad z_x,\quad \frac{\partial f}{\partial x},\ \ \frac{\partial z}{\partial x}\qquad \left(f_y(x,y),\quad f_y,\quad z_y,\quad \frac{\partial f}{\partial y},\ \ \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

等と記す．

◆ **第 2 次偏導関数** 2 変数関数 $z=f(x,y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$ が連続で，その偏導関数 f_{xy} が存在し，さらに連続ならば偏導関数 f_{yx} も存在し，かつ $f_{xy}=f_{yx}$ となる．

◆ **合成関数の偏導関数**

(i) 2 変数関数 $t=f(x,y)$ と 1 変数関数 $z=F(t)$ との合成関数の偏微分は $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{dz}{dt}\dfrac{\partial t}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{dz}{dt}\dfrac{\partial t}{\partial y}$

(2) 2 変数関数 $z=f(x,y)$ の偏導関数が連続であり，1 変数関数 $x=x(t)$，$y=y(t)$ が微分可能ならば合成関数 $z=f(x(t),y(t))$ は t について微分可能であり，

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

(3) 2 変数関数 $z=f(x,y)$ の偏導関数が連続であり，2 変数関数 $x=x(s,t)$, $y=y(s,t)$ が s,t に関し偏微分可能ならば合成関数 $z=f(x(t),y(t))$ は s,t について偏微分可能であり，

$$\frac{dz}{ds}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds},\qquad \frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

◆ **極座標による変換**

(1) $z=f(x,y)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ のとき

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

(2) $w=f(x,y,z)$, $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$ のとき

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2=\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right\}$$

◆ **全微分**　2 変数関数 $z=f(x,y)$ について

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(x,y)-f(a,b)-A(x-a)-B(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0$$

となる A,B がとれるとき，$f(x,y)$ は (a,b) において**全微分可能**だという．このとき $A=f_x(a,b)$, $B=f_y(a,b)$ となる．偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ が (a,b) で連続ならば f は (a,b) で全微分可能となる．またこのとき形式的な量

$$dz(=df)=f_x(a,b)dx+f_y(a,b)dy=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)dy$$

を $f(x,y)$ の**全微分**という．

◆ **2 変数の極値問題**　2 変数関数 $z=f(x,y)$ について

(1) $f(x,y)$ が偏微分可能であり，$f(a,b)$ が極値ならば　$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$

(2) $f(x,y)$ が連続な第 2 次偏導関数を持つとき，$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ となる (a,b) に対し

$$A=f_{xx}(a,b),\quad B=f_{xy}(a,b),\quad A=f_{yy}(a,b),\quad \Delta=B^2-AC$$

とおくとき，

(i) $\Delta<0$, $A>0$ ならば $f(a,b)$ は極小値

(ii) $\Delta<0$, $A<0$ ならば $f(a,b)$ は極大値

(iii) $\Delta>0$ ならば $f(a,b)$ は極値ではない

◆ **陰関数の微分**

(1) $f(x,y)$ が連続な偏導関数をもち，$f(a,b)=0$, $f_y(a,b)\neq 0$ ならば a に近い x の 1 変数関数 $y=\varphi(x)$ で

$$f(x,\varphi(x))=0,\quad b=\varphi(a),\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}$$

(2)　$f(x,h)$ が連続な 2 次偏導関数をもつならば

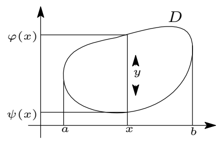
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}$$

6.　重積分

◆　**2 重積分の計算**　2 重積分 $I = \iint_D f(x,y)dxdy$ の積分領域 D について

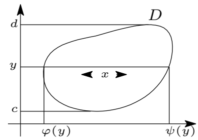
(1)　$D = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{c} a \leq x \leq b \\ \psi(x) \leq y \leq \varphi(x) \end{array} \right\}$ と表されるならば

$$I = \int_a^b \left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)dy \right) dx$$



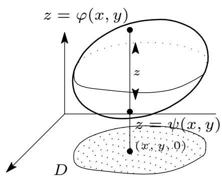
(2)　$D = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{c} c \leq y \leq d \\ \psi(y) \leq x \leq \varphi(y) \end{array} \right\}$ と表されるならば

$$I = \int_c^d \left(\int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} f(x,y)dx \right) dy$$



◆　**3 重積分の計算**　3 重積分 $I = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz$ の積分領域 V が xy 平面の領域 D と 2 変数関数 $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ によって $V = \left\{ (x,y,z) \middle| \begin{array}{c} (x,y) \in D \\ \psi(x,y) \leqq z \leqq \varphi(x,y) \end{array} \right\}$ と表されるならば

$$I = \iint_D \left(\int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy$$



◆　**座標変換公式**

(1)　2 重積分の場合.　$x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ なる変換について

(1)　xy 平面の領域 D の点と uv 平面の領域 E の点が 1 対 1 に対応,

(2)　ヤコビ行列式 $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ は D の各点で 0 ではない

となるならば

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(\varphi(u,v), \psi(u,v))|J|dudv$$

(2)　3 重積分の場合も $x=\varphi(u,v,w),\ y=\psi(u,v,w),\ z=\xi(u,v,w)$ なる変換について同様の条件が成立すれば次の公式が成り立つ：

$$\begin{aligned}&\iint_D f(x,y)dxdy\\ &=\iint_E f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\xi(u,v,w))|J|dudvdw,\end{aligned}\qquad J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\ (\neq 0)$$

◆　**よく利用する座標変換**

(1)　2 重積分について

1. 極座標変換　$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$　(ヤコビ行列式は $J=r$).
2. 一次変換 $x=au+bv,\ y=cu+dv$　(ヤコビ行列式は $J=ad-bc$).

(2)　3 重積分について

1. 円柱座標変換　$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ z=z$　(ヤコビ行列式は $J=r$).
2. 球面極座標変換 $x=r\sin\theta\cos\phi,\ y=r\sin\theta\sin\phi,\ z=r\cos\theta$　(ヤコビ行列式は $J=r^2\sin\theta$).

◆　**面積**　平面の領域 D の面積は　$A=\underbrace{\iint_D dxdy}_{\text{直交座標系}}=\underbrace{\iint_D rdrdy}_{\text{極座標系}}$

◆　**体積**　空間の領域 E の体積は　$V=\underbrace{\iint_E dxdydz}_{\text{直交座標系}}=\underbrace{\iint_E r^2\sin\theta d\theta d\phi}_{\text{極座標系}}$

◆　**曲面積**　直交座標系で方程式 $z=f(x,y)$ で与えられる曲面 S 内の領域 E の xy 平面への正射影を D とするとき，面積 E の面積は次で与えられる：

$$S=\underbrace{\iint_E dS}_{dS\ \text{は面素}}=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

特に E が xy 平面上の曲線 $y=f(x)$　$(a\leq x\leq b)$ を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の表面積の場合は次で与えられる：

$$S=\iint_E dS=\ 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

◆　**重心** (1)　D を平面上の各点 (x,y) に質量密度 $\rho=\rho(x,y)$ が与えられている物体とする．このとき D の重心 $(\overline{x},\overline{y})$ は次で与えられる：

$$\overline{x}=\frac{1}{M}\iint_D x\rho\,dxdy,\qquad \overline{y}=\frac{1}{M}\iint_D y\rho\,dxdy,\qquad \left(M=\iint_D\rho\,dxdy\ \text{は全質量}\right)$$

特に密度が一定のとき，

$$\overline{x}=\frac{1}{S}\iint_D x\,dxdy,\qquad \overline{y}=\frac{1}{S}\iint_D y\,dxdy,\qquad (S\ \text{は面積})$$

(2) ℓ を平面上の各点 (x,y) に質量密度 $\rho=\rho(x,y)$ が与えられている曲線とする． このとき ℓ の重心 $(\overline{x},\overline{y})$ は次で与えられる：

$$\overline{x}=\frac{1}{M}\int x\rho\,ds, \qquad \overline{y}=\frac{1}{M}\int y\rho\,ds, \qquad \left(ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2},\ M=\int\rho\,ds\right)$$

特に密度が一定のとき，

$$\overline{x}=\frac{1}{L}\int x\rho\,ds, \qquad \overline{y}=\frac{1}{L}\int y\rho\,ds, \qquad \left(ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2},\ L=\int ds \text{ は } \ell \text{ の長さ}\right)$$

◆ **線積分** $\omega=Pdx+Qdy$ $(P=P(x,y),Q=Q(x,y)$ は連続関数$)$ を xy 平面上の 1 次微分形式とする． $C:(x,y)=(x(t),y(t))$ $(a\leq t\leq b)$ を連続な導関数を持つ xy 平面上の曲線とするとき， C に沿った ω の線積分は次で計算される：

$$\int_C\omega\;=\;\int_a^b\left\{P(x(t),y(t))\frac{dx}{dt}+Q(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}\right\}dt$$

◆ **グリーンの定理** xy 平面上において D を有界な領域とする． D の境界は有限個の区分的に滑らかな閉曲線からなるものとする． この境界を C とし， 正の向きを定める． 関数 $P=P(x,y)$， $Q=Q(x,y)$ が閉領域 D で連続な偏導関数を持つならば次式が成り立つ：

$$\oint_C Pdx+Qdy\;=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$